

Вывод ур-ния теплопроводности

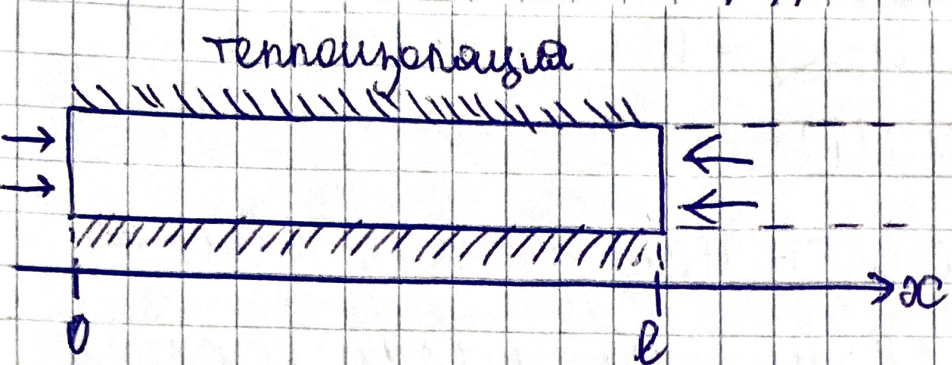
09/05

(одномерный случай)

Работы Ж. Фурье
(1807 - 1830-е гг.)

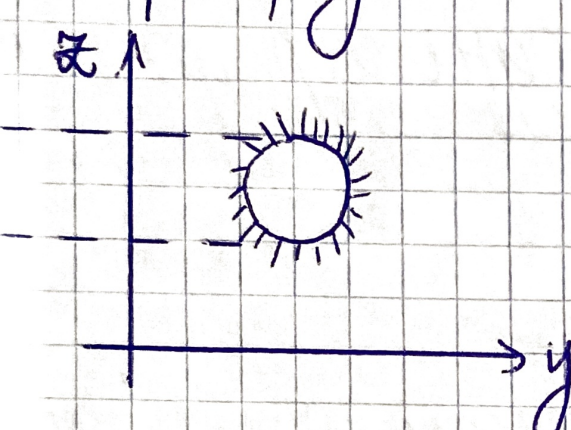
В процессе распространения тепла в твердых телах. Центр. роль играет след. эмпирический закон Фурье: тепло передается от более нагретой части тела к менее нагретой со скоростью пропорциональной перепаду температуры и/частами.

Простейшая модель - правильный металл. стержень с теплоизолир. боков. пов-тью.



При $x=0$ и $x=l$ может происх. взаимодействие с

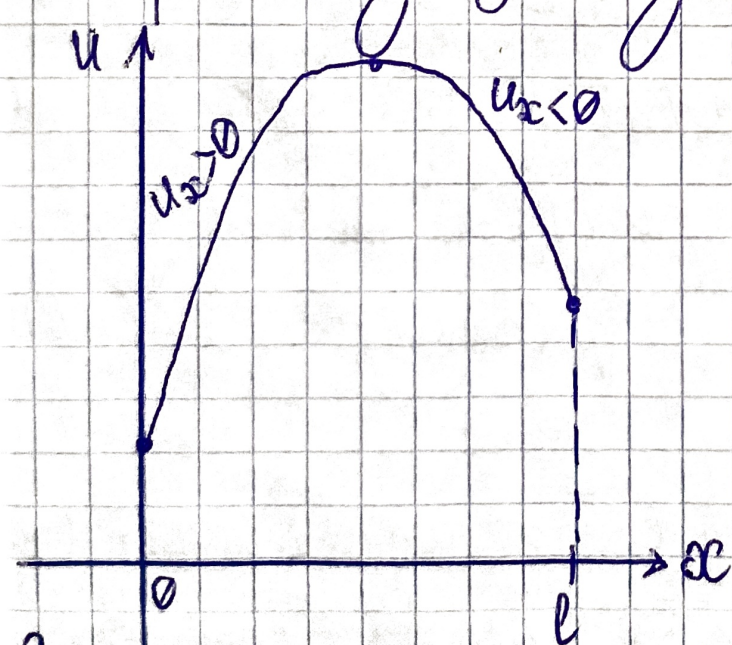
окр. средой



t - время; (x, y, z) - координаты, причем $0 \leq x \leq l$ - координата вдоль стержня; u - температура внутри стержня

на, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$ (предположение) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \underline{u = u(x, t)}$

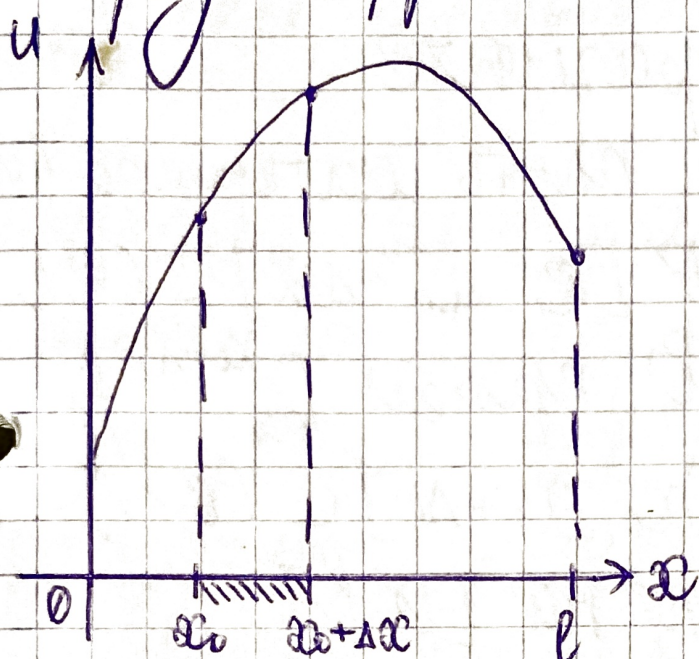
Формализация закона Фурье



Температура в фикс. момент времени t .

$q = -k u_x(x, t)$ - тепловой поток в т. x в момент времени t в положительн. направл. оси по ox , где k - коэф.

предпорядку-ти или коэфф. Теплопровод-ти
 и/вывода нитного ур-ния выделим
 опреде. фрагмент стержня $[x_0, x_0 + \Delta x]$



$q_1 = -k u_x(x_0, t)$ —
 — входящ. теплов. по-
 ток на лев. краю

$q_2 = k u_x(x_0 + \Delta x, t)$ —
 — на прав. краю

Суммар. тепловой

поток равен $q = q_1 + q_2 = k(u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)) \equiv \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} k u_{xx}(x, t) dx$, $k = \text{const} > 0$

Суммар. кол-во тепла, пришедшее во
 фрагмент за время Δt равно $Q = q \cdot \Delta t =$
 $= \left(\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} k u_{xx}(x, t) dx \right) \Delta t$ (рав-во точное, тем-
 пература Δt)

Эту же величину можно вычислить че-
 рез удельн. теплоемкость C (-кол-во тепла,
 надо сообщить единице. массе тела
 данного материала, чтобы изменить ~~тем-~~
 температуру на 1°)

$C \cdot [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]$ — как изм-сь темп-ры
 типа Δu в м. x

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} C [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] g dx = \left(\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} k u_{xx}(x, t) dx \right) \Delta t$$

— ур-ние баланса
 тепла в выделенном элементе

Здесь g — линейная пл-ть материала (кум)

Ур-ние вып-ся $g/V [x_0, x_0 + \Delta x] \subset (0, l)$

Лемма $\exists f_1, f_2 \in (0, l)$, причем $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f_1(x) dx =$

$$= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f_2(x) dx, \quad \forall [x_0, x_0 + \Delta x] \subset (0, l).$$

Тогда $f_1(x) \equiv f_2(x)$ всюду на $[0, l]$

▲ Очевидно ■

Применяя л. к ур-нию баланса, получаем $C [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] g = k u_{xx}(x, t) \Delta t$ при $0 < x < l$ (всюду).

Это ~ след. записи: $C g \cdot \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k u_{xx}(x, t)$ при $0 < x < l$

Чем Δt меньше, тем точнее рав-во; в lim-е получаем: $C g u'_t(x, t) = k u_{xx}(x, t)$ при $x \in [0, l]$, $t \geq 0$

В оконч. виде получ. ур-ние одномер. теплопровод-ти: $[u_t = a^2 u_{xx}, u = u(x, t), 0 \leq x \leq l, t \geq 0]$

где $a^2 = \frac{k}{Cg} > 0$ — фикс. числ. коэфф — коэфф

~~температуры~~ температуропроводности (чем $> a^2$, тем быстрее изм-ся тем-ра)

Ур ЧТ, как правило, имеют очень много (∞ много) различных реш. Поэтому д/конкрет. ур-ний, как правило, изуч-ся конкрет. задачи

§ Понятие задачи в МФ

Задачей в МФ наз-ся совокупность Ур ЧТ и доп. усл-й, позволяющих выделить нужные реш. В класс. теории доп. усл-я бывают, обычно, начальными и краевыми (граничными)

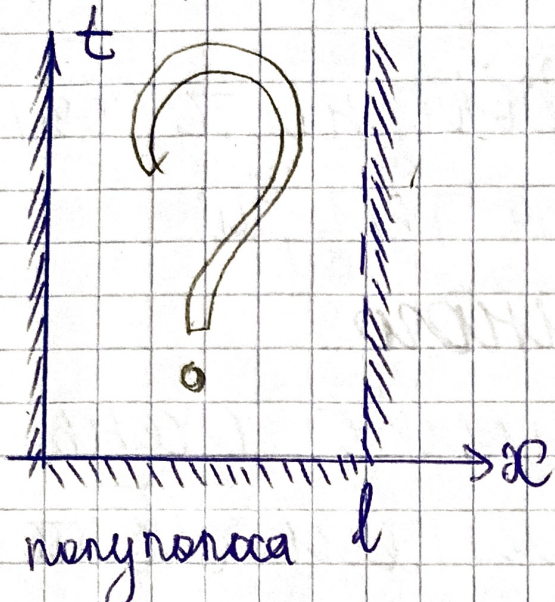
Пример (Простейшая задача д/ур-ния температуропроводности)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t \geq 0, \\ (1) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\ \quad \quad \quad u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$u = u(x, t) - ?$ Ф-ция $u(x)$ задана

Решение

(метод Фурье / метод разделения перемен.)



Элемент. реш. ур-ния
вида $u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0$

Подставим в ур-ние:

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{пропорция} \} \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$\uparrow$ некая const

Отсюда $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Добавляем к ур-нию кр. усл. из исход. задачи и получаем задачу Штурма-Лиувилля (ЗШЛ):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

где λ - спектральный пар-тр

Постановка ЗШЛ: требуется найти такие знан. λ (собств. знан. ЗШЛ), при д данная задача имеет нетривиал. реш. $X(x) \neq 0$ (собств. ф-ция ЗШЛ). Спектр ЗШЛ - совокупность с.зн. и отвечающих им с.ф.

спектр: $A_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$, $k = \overline{1, \infty}$

Подставляем найденные A_k в пропр-ую и получаем ур-ние $g/T(t)$. $T'(t) = -a^2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 T(t) \sim T'(t) + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T(t) = 0$
[ур-ние вида $y'(t) + \alpha y(t) = 0 \sim y(t) = M e^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$] $\Rightarrow T_k(t) = e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}$ при $t \geq 0$
(с точностью до множителя)

Получим α набор элемент. реш.
 $u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l}$,
 $k = \overline{1, \infty}$

Принцип суперпозиции: общее состояние с-мы есть л/к из всех элементар-нейт с-мы (в лин. задачах часто бывает так)

Общее реш: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l}$,

$0 < x < l$, $t \geq 0$, $A_k = ?$

Наче уса: $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \varphi(x)$

на $(0, l)$ (на $[0, l]$ в идеал. случае) — разд Фурье $g/\varphi(x)$ по $\sin$, коэфф — по Фурье

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k = \overline{1, \infty}$$

Ornbern: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l},$

$0 \leq x \leq l, t \geq 0, \text{ ygl } A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx,$
 $k = \overline{1, \infty}$